УДК 517.97

А. А. Ковалевский

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ Г-СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ГРАДИЕНТ

Для последовательностей интегральных функционалов, определенных на пространствах $\mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$, устанавливается необходимое условие их Г-сходимости на множествах функций $u \in \mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих ограничению $\varphi\,(x, \nabla u\,(x)) \leqslant 1$ при почти всех $x \in \Omega$. Это условие заключается в поточечной сходимости к интегранту Г-предельных функционалов некоторых функций, построенных по интегрантам исходных функционалов и функции φ.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\mathcal{O}_n$ — совокупность всех непустых ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$. Будем использовать следующее определение Г-сходимости функционалов, определенных на пространствах $\mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$.

Определение. Пусть $\Omega \in \mathcal{O}_n$, $\{I_s\}$ — последовательность функционалов на $\mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$, $U \subset V \subset \mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$, $U \neq \varnothing$, I — функционал на V. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(V)$-сходится к функционалу I на U, если:

1) для любой функции $u \in U$ и любой последовательности $\{u_s\} \subset V$, равномерно сходящейся к u на Ω, справедливо неравенство $\varliminf\limits_{s\to\infty} I_s\,(u_s) \geqslant I\,(u)$;

2) для любой функции $u \in U$ существует последовательность $\{w_s\} \subset V$, равномерно сходящаяся к u на Ω и такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} I_s\,(w_s) = I\,(u)$.

1. Функционалы $I_{\Omega,s}$ **и множества** V_Ω. Пусть M — неотрицательная локально ограниченная функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $\{f_s\}$ — последовательность каратеодориевских функций на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, такая, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $x, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$|f_s(x, \eta)| \leqslant M(x, \eta); \tag{1}$$

для любых $s \in \mathbb{N}$, $x, \eta, \eta' \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0, 1]$

$$f_s(x, \alpha\eta + (1-\alpha)\eta') \leqslant \alpha f_s(x, \eta) + (1-\alpha) f_s(x, \eta'). \tag{2}$$

Заметим, что если $\Omega \in \mathcal{O}_n$, $s \in \mathbb{N}$, $u \in \mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$, то $f_s\,(\cdot, \nabla u\,(\cdot)) \in L^\infty\,(\Omega)$. Это позволяет определить функционалы $I_{\Omega,s}$ следующим образом: если $\Omega \in \mathcal{O}_n$, $s \in \mathbb{N}$, то $I_{\Omega,s}$ — функционал на $\mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$, такой, что $\forall\, u \in \mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$

$$I_{\Omega,s}(u) = \int\limits_{\Omega} f_s(x, \nabla u)\, dx.$$

Пусть, далее, φ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi\,(x, 0) \leqslant 0$ и функция $\varphi\,(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$. Положим

4 3–538

для любого $y \in \mathbb{R}^n$ $\Phi_y = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \varphi(y, \eta) \leqslant 1\}$. Ясно, что $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $\Phi_y \neq \varnothing$. Будем считать, что выполняется такое условие:

$\forall \Omega \in \mathscr{O}_n$ множество $\bigcup\limits_{y \in \Omega} \Phi_y$ ограничено. (3)

Для любой области $\Omega \in \mathscr{O}_n$ положим

$V_\Omega = \{u \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}) : \varphi(x, \nabla u(x)) \leqslant 1$ при почти всех $x \in \Omega\}$.

2. Функции F_t', F_t''. Введем обозначения: если $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$, то $Q_t(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < \frac{1}{2t},\ i = 1, \ldots, n\right\}$; если $t \in \mathbb{N}$, то $P(t) = tQ_1(0)$; если $y \in \mathbb{R}^n$, то $t_y = \min\{t \in \mathbb{N} : \Phi_y \subset P(t)\}$, $\mu(y) = \sup\{M(x, \xi) : (x, \xi) \in Q_1(y) \times P(t_y)\}$.

Положим еще $\Phi = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \varphi(y, \eta) \leqslant 1\}$, и пусть для любых $t, r \in \mathbb{N}$, $(y, \eta) \in \Phi$

$$V_{t,r}(y, \eta) = \{u \in \mathrm{Lip}(\overline{Q_t(y)}) : \varphi(y, \eta + \nabla u(x)) \leqslant 1,\ |u(x)| \leqslant r^{-1}$$

при почти всех $x \in Q_t(y)\}$.

Ясно, что множества $V_{t,r}(y, \eta)$ — непустые.

Пусть теперь для любых $t, r, s \in \mathbb{N}$, $(y, \eta) \in \Phi$

$$F_{t,r,s}(y, \eta) = t^n \inf_{u \in V_{t,r}(y,\eta)} \int\limits_{Q_t(y)} f_s(x, \eta + \nabla u)\, dx.$$

В силу (1) справедливо неравенство $|F_{t,r,s}(y, \eta)| \leqslant \mu(y)$.

Для любых $t, r \in \mathbb{N}$, $(y, \eta) \in \Phi$ положим

$$F_{t,r}'(y, \eta) = \varliminf_{s \to \infty} F_{t,r,s}(y, \eta),\quad F_{t,r}''(y, \eta) = \varlimsup_{s \to \infty} F_{t,r,s}(y, \eta).$$

Наконец, пусть для $t \in \mathbb{N}$ F_t', F_t'' — функции на Φ, такие, что $\forall (y, \eta) \in \Phi$

$$F_t'(y, \eta) = \sup_r F_{t,r}'(y, \eta),\quad F_t''(y, \eta) = \sup_r F_{t,r}''(y, \eta).$$

3. Основной результат. Обозначим через F множество всех функций f, определенных на Φ, и таких, что для любых $\Omega \in \mathscr{O}_n$, $u \in V_\Omega$ функция $f(\cdot, \nabla u(\cdot)) \in L^1(\Omega)$. Для $f \in \mathscr{F}$ и $\Omega \in \mathscr{O}_n$ пусть I_Ω^f — функционал на V_Ω, такой, что $\forall u \in V_\Omega$

$$I_\Omega^f(u) = \int\limits_\Omega f(x, \nabla u)\, dx.$$

Положим еще $\Phi_0 = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \varphi(y, \eta) < 1\}$.

Теорема. Пусть $f \in \mathscr{F}$, причем f непрерывна на Φ_0, и пусть $\forall \Omega \in \mathscr{O}_n$ последовательность $\{I_{\Omega,s}\}$ $\Gamma(V_\Omega)$-сходится к функционалу I_Ω^f на V_Ω. Тогда последовательности $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$ сходятся к f на Φ_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(y, \eta) \in \Phi_0$. Положим $\lambda = \min\{1 - \varphi(y, \eta), 1\}$, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, и положим $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$. Из условия (3) следует, что найдется $l \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\bigcup_{x \in Q_1(y)} \Phi_x \subset P(l).$$

В силу непрерывности φ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ существует $\delta_1 \in (0, 1)$, такое, что

$$\forall (x', \eta'),\ (x'', \eta'') \in Q_1(y) \times P(l),\ |x' - x''|^2 + |\eta' - \eta''|^2 \leqslant \delta_1^2 : |\varphi(x', \eta') - \varphi(x'', \eta'')| \leqslant \frac{\lambda}{k}. \quad (4)$$

Кроме того, в силу непрерывности f на Φ_0 существует $\delta_2 \in (0, 1)$, такое, что

$$\forall (x, \xi) \in \Phi_0,\ |x - y|^2 + |\xi - \eta|^2 \leqslant \delta_2^2 : |f(x, \xi) - f(y, \eta)| \leqslant \frac{1}{k}, \quad (5)$$

$$\forall (x, \xi) \in \Phi_0,\ |x - y|^2 + |\xi - \alpha_k\eta|^2 \leqslant \delta_2^2 : |f(x, \xi) - f(y, \alpha_k\eta)| \leqslant \frac{1}{k}. \quad (6)$$

Зафиксируем $t \geqslant n\,[\min(\delta_1, \delta_2)]^{-1}$, положим $\Omega = Q_t(y)$, и пусть v_η — функция на Ω, такая, что $\forall x \in \Omega\ v_\eta(x) = (x - y, \eta)$. Используя (4) и (5), устанавливаем, что $v_\eta \in V_\Omega$ и

$$|t^n I^f_\Omega(v_\eta) - f(y, \eta)| \leqslant \frac{1}{k}. \qquad (7)$$

Согласно условию теоремы последовательность $\{I_{\Omega,s}\}$ $\Gamma(V_\Omega)$-сходится к функционалу I^f_Ω на V_Ω. Следовательно, существует последовательность $\{w_s\} \subset V_\Omega$, равномерно сходящаяся к v_η на Ω и такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} I_{\Omega,s}(w_s) = I^f_\Omega(v_\eta)$. Отсюда и из (7) следует, что при $s \geqslant s'$

$$t^n I_{\Omega,s}(w_s) \leqslant f(y, \eta) + \frac{2}{k}. \qquad (8)$$

Пусть $\forall s \in \mathbb{N}\ \tilde{w}_s = \alpha_k(w_s - v_\eta)$. Зафиксируем произвольное $r \in \mathbb{N}$. В силу равномерной сходимости $\{w_s\}$ к v_η на Ω при $s \geqslant s''$

$$\sup_{x\in\Omega} |\tilde{w}_s(x)| \leqslant r^{-1}. \qquad (9)$$

Возьмем теперь произвольное $s \geqslant \max(s', s'')$. Используя (4) и включение $w_s \in V_\Omega$, получаем, что при почти всех $x \in \Omega$

$$\varphi(y, \eta + \nabla\tilde{w}_s(x)) = \varphi(y, \alpha_k \nabla w_s(x) + (1 - \alpha_k)\eta) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k \varphi(y, \nabla w_s(x)) + (1 - \alpha_k)\varphi(y, \eta) \leqslant \alpha_k + \alpha_k |\varphi(y, \nabla w_s(x)) -$$
$$- \varphi(x, \nabla w_s(x))| + (1 - \alpha_k)\varphi(y, \eta) \leqslant \alpha_k + \alpha_k \frac{\lambda}{k} + (1 - \alpha_k)(1 - \lambda) = 1.$$

Отсюда и из (9) вытекает, что $\tilde{w}_s \in V_{t,r}(y, \eta)$ и, следовательно,

$$F_{t,r,s}(y, \eta) \leqslant t^n \int\limits_\Omega f_s(x, \eta + \nabla\tilde{w}_s)\,dx.$$

А так как в силу (1) и (2) для почти всех $x \in \Omega$

$$f_s(x, \eta + \nabla\tilde{w}_s(x)) \leqslant \alpha_k f_s(x, \nabla w_s(x)) + (1 - \alpha_k)\mu(y),$$

то

$$F_{t,r,s}(y, \eta) \leqslant \alpha_k t^n I_{\Omega,s}(w_s) + (1 - \alpha_k)\mu(y).$$

Из этого неравенства и неравенства (8) выводим

$$F_{t,r,s}(y, \eta) \leqslant f(y, \eta) + \frac{1}{k}(|f(y, \eta)| + \mu(y) + 2).$$

Отсюда, учитывая произвольность s и r, получаем

$$F''_t(y, \eta) \leqslant f(y, \eta) + \frac{1}{k}(|f(y, \eta)| + \mu(y) + 2). \qquad (10)$$

Пусть снова фиксировано $r \in \mathbb{N}$. Ясно, что существует возрастающая последовательность $\{s_i\} \subset \mathbb{N}$, такая, что $\forall i \in \mathbb{N}$

$$F_{t,r,s_i}(y, \eta) \leqslant F'_t(y, \eta) + \frac{1}{k}. \qquad (11)$$

Для произвольного $i \in \mathbb{N}$ зафиксируем функцию $u_i \in V_{t,r}(y, \eta)$, такую, что

$$\int\limits_\Omega f_{s_i}(x, \eta + \nabla u_i)\,dx \leqslant t^{-n} F_{t,r,s_i}(y, \eta) + \frac{1}{k} t^{-n}.$$

Отсюда и из (11) вытекает, что для любого $i \in \mathbb{N}$

$$I_{\Omega,s_i}(v_\eta + u_i) \leqslant t^{-n} F'_t(y, \eta) + \frac{2}{k} t^{-n}. \qquad (12)$$

А так как $\{u_i\} \subset V_{t,r}(y, \eta)$, то существуют возрастающие последовательности $\{i_p\} \subset \mathbb{N}$ и $u^r \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$, такие, что последовательность $\{u_{i_p}\}$ равномерно сходится к u^r на Ω. При этом

$$\sup_{x\in\Omega}|u^r(x)|\leqslant r^{-1}. \tag{13}$$

Положим $\psi^r=\alpha_k(v_\eta+u^r)$, $\forall p\in\mathbb{N}$ $\psi_p=\alpha_k(v_\eta+u_{i_p})$. Если $p\in\mathbb{N}$, то в силу (4) и принадлежности u_{i_p} множеству $V_{t,r}(y,\eta)$ для почти всех $x\in\Omega$ имеем

$$\varphi(x,\nabla\psi_p(x))\leqslant\alpha_k\varphi(x,\eta+\nabla u_{i_p}(x))\leqslant\alpha_k\varphi(y,\eta+\nabla u_{i_p}(x))+$$

$$+\alpha_k|\varphi(x,\eta+\nabla u_{i_p}(x))-\varphi(y,\eta+\nabla u_{i_p}(x))|\leqslant\alpha_k+\alpha_k\frac{\lambda}{k}\leqslant 1.$$

Следовательно, $\{\psi_p\}\subset V_\Omega$. А поскольку $\{\psi_p\}$ равномерно сходится к ψ^r на Ω, то и $\psi^r\in V_\Omega$. Положим теперь

$$\chi_s=\begin{cases}\psi_p, & \text{если } s=s_{i_p} \text{ при некотором } p;\\ \psi^r, & \text{если } s\neq s_{i_p} \text{ ни при каком } p.\end{cases}$$

Так как $\{\chi_s\}\subset V_\Omega$ и $\{\chi_s\}$ равномерно сходится к ψ^r на Ω, то в силу $\Gamma(V_\Omega)$-сходимости $\{I_{\Omega,s}\}$ к I^f_Ω на V_Ω

$$\varliminf_{s\to\infty}I_{\Omega,s}(\chi_s)\geqslant I^f_\Omega(\psi^r).$$

Тогда и

$$\varliminf_{p\to\infty}I_{\Omega,s_{i_p}}(\psi_p)\geqslant I^f_\Omega(\psi^r). \tag{14}$$

Но в силу (1), (2) и (12) для любого $p\in\mathbb{N}$ имеем

$$I_{\Omega,s_{i_p}}(\psi_p)\leqslant\alpha_k I_{\Omega,s_{i_p}}(v_\eta+u_{i_p})+$$

$$+(1-\alpha_k)\mu(y)t^{-n}\leqslant t^{-n}F'_t(y,\eta)+\frac{2}{k}t^{-n}(1+\mu(y)).$$

Отсюда и из (14) вытекает, что

$$t^nI^f_\Omega(\psi^r)\leqslant F'_t(y,\eta)+\frac{2}{k}(1+\mu(y)). \tag{15}$$

Кроме того, в силу (13)

$$\sup_{x\in\Omega}|\psi^r-\alpha_kv_\eta|\leqslant r^{-1}. \tag{16}$$

Итак, для любого $r\in\mathbb{N}$ существует функция $\psi^r\in V_\Omega$, такая, что справедливы неравенства (15), (16). Из (16) вытекает, что последовательность $\{\psi^r\}$ равномерно сходится к функции α_kv_η, которая в силу включения $v_\eta\in V_\Omega$ также принадлежит V_Ω. Тогда в силу того, что функционал I^f_Ω является $\Gamma(V_\Omega)$-пределом на V_Ω последовательности $\{I_{\Omega,s}\}$, справедливо неравенство

$$\varliminf_{r\to\infty}I^f_\Omega(\psi^r)\geqslant I^f_\Omega(\alpha_kv_\eta).$$

Из этого неравенства и неравенства (15) выводим, что

$$t^nI^f_\Omega(\alpha_kv_\eta)\leqslant F'_t(y,\eta)+\frac{2}{k}(1+\mu(y)). \tag{17}$$

Но в силу (4) и (6)

$$t^nI^f_\Omega(\alpha_kv_\eta)\geqslant f(y,\alpha_k\eta)-\frac{1}{k}.$$

Отсюда и из (17) получаем, что

$$F'_t(y,\eta)\geqslant f(y,\alpha_k\eta)-\frac{1}{k}(2\mu(y)+3). \tag{18}$$

Из неравенств (10) и (18) вытекает, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} F''_t(y, \eta) \leqslant f(y, \eta) + \frac{1}{k}(|f(y, \eta)| + \mu(y) + 2),$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} F'_t(y, \eta) \geqslant f(y, \alpha_k\eta) - \frac{1}{k}(2\mu(y) + 3).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} F''_t(y, \eta) \leqslant f(y, \eta) \leqslant \underline{\lim_{t\to\infty}} F'_t(y, \eta).$$

Отсюда и из того, что в силу определения функций F'_t, F''_t для любого $t \in \mathbb{N}$ $F'_t(y, \eta) \leqslant F''_t(y, \eta)$, выводим, что последовательности $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ сходятся к f на элементе (y, η). А так как (y, η) — произвольный элемент из Φ_0, то последовательности $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ сходятся к f на Φ_0. Теорема доказана.

Примером функции φ, удовлетворяющей всем требуемым от нее в статье условиям, может служить функция φ, определяемая равенством $\varphi(y, \eta) = \psi^{-1}(y)|\eta|$, где ψ — непрерывная положительная функция на $\mathbb{R}^n$. При этом для соответствующих множеств V_Ω верно равенство $V_\Omega = \{u \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}) : |\nabla u| \leqslant \psi$ почти всюду на $\Omega\}$. Вопрос о Г-сходимости интегральных функционалов и усреднении задач минимизации этих функционалов на множествах функций с ограничениями на градиент вида $|\nabla u| \leqslant \psi$ изучался в работах [1—3].

1. *Carbone L*. Sur un probleme d'homogeneisation avec des contraintes sur le gradient // J. Math. Pures Appl.— 1979.— 58, N 3.— P. 275—297.
2. *Carbone L., Salerno S*. On a problem of homogenization with quickly oscillating constraints on the gradient // J. Math. Anal. and Appl.— 1982.— **90**.— P. 219—250.
3. *Carbone L., Salerno S*. Further results on a problem of homogenization with constraints on the gradient // J. Anal. Math.— 1984.— 1985.— **44**.— P. 1—20.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 11.12.91